

# Zusammenfassung Sem I

## Math. Grundlagen:

Def:  $F(p)$ ,  $p \in \mathbb{C}$  sei rational in  $p$ , d.h. für  $p \in \mathbb{R}$   $\Rightarrow F(p) = \frac{Z(p)}{N(p)}$  mit  $Z(p), N(p) \in \mathbb{R}[p]$  Polynome,  $a_i \in \mathbb{R}$

Polynomdarstellung:  $F(p) = K \cdot \frac{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0}{p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_0}$

Zahl d. Nullstellen:  $Z(p): n$

$N(p): m$

$K: \frac{1}{a_{n-m+1}}$

Zahl d. Nullstellen: Zahl d. Pole = Zahl d. Nst.

$= \max \{ \text{grad}(Z(p)), \text{grad}(N(p)) \}$

$= \text{Grad } F(p)$

Produktzerlegung:  $F(p) = K \cdot \frac{(p-p_{0,1}) \dots (p-p_{0,n})}{(p-p_{0,1}) \dots (p-p_{0,m})}$

es gilt:  $p_{0,i}, p_{0,j} \in \mathbb{R}$  oder  $\exists j$  mit  $p_{0,i} = \bar{p}_{0,j}$ ,  $p_{0,i} = \bar{p}_{0,j}$ ,  $i \neq j$

Partialbruchzerlegung:  $F(p) = \frac{Z(p)}{\prod_{k=1}^s (p-p_{0,k})^{m_k}}$

$S \triangleq$  Zahl d. Pole

$m_k \triangleq$  Vielfachheit

$\geq c_r p^r + c_{r-1} p^{r-1} + \dots + c_0 + \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^{m_k} \frac{B_{ki}}{(p-p_{0,k})^i}$

Um ein  $m_k$ -fachen Pol zerlegt  $\text{Re}\{F(p)\}$  zu, weil  $\text{Re}\{F(p)\}$  das VZ

$H(p) = L(h(t))$   
Ü-Fkt. Zeitinvariant  
Systeme

$H(p)$  sei Ü-Fkt. eines Systems aus konzentrierten Bauelementen.  
Dann ist  $H(p)$  eine gebrochene rationale Fkt. in  $p$ , für reellwertige Bauelemente gilt  $H(p) \in \mathbb{R} \forall p \in \mathbb{R}$

Stabilität: System stabil  $\Leftrightarrow \int_0^\infty |h(t)| dt \leq M < \infty$

$\Rightarrow$  notw. Bed. für Stabilität:  $H(p)$  besitzt kein Nullpolynom  $\Rightarrow n \leq m$

Stabiles System  $\Leftrightarrow$  Imag. Achse zu d. p-Ebene gehört zum Konvergenzgebiet  
kausales System  $\Leftrightarrow \text{Re}\{p\} > \max_i \text{Re}\{p_{0,i}\}$   
kausales stab. System  $\Rightarrow \text{Re}\{p_{0,i}\} < 0$   
 $\Rightarrow N(p)$  ist Hurwitzpolynom

RLCC-ZP: Eigenschaften:

Sei  $F(p)$  eine ZP-Fkt. Dann ist auch  $F(p^*)$ ,  $a \geq 0$  eine ZP-Fkt.

$F(p)$  hat keine Pole/Nst. in  $\text{Re}\{p\} > 0$

Auf  $p = j\omega$  sind alle Pole/Nst. einfach mit  $\text{Res}\{p_i\} > 0 \Leftrightarrow$

$\text{Re}\{F(p)\} > 0$  für  $\text{Re}\{p\} > 0$  ... positive Fkt.

Realthe - ZPF

$\text{Re}\{F(j\omega)\} \geq 0$

$F(p) = \frac{1}{2} (F(p) + F(-p)) + \frac{1}{2} (F(p) - F(-p)) = G(p) + U(p)$

$F$  rational und reell für reelle  $p \Rightarrow \text{Re}\{F(j\omega)\} = G(j\omega) \geq 0$  (s.o.)  
 $\lim_{\omega \rightarrow \infty} F(j\omega) = U(j\omega)$   
 $F(p)$  ungerade in  $p$

$\Rightarrow F(p) = \frac{A_0}{p} + \sum_{v=1}^n \frac{A_v p}{p^2 + \omega_v^2} + A_{\infty} p$  mit Residuen  $A_0 \geq 0$  ("=" Pol mit Vorzeichen)

Eigenschaften: bei  $p = j\omega$   $A_0 \geq 0$  ist  
Pole und Nst. wechseln sich ab  
alle Pole auf  $p = j\omega$ , einfach, posit. Erweiterungskoeff.

Buchschema:  $\sim \times \times \times \times \vee$

Partialbruchdarstellung:  $F(p) = X_0 + \sum_{v=1}^n X_v + X_{\infty}$

$\rightarrow F(p)$  ist: Impedanz

Admittanz

$G_0 = \frac{1}{A_0}$

$L_0 = \frac{1}{A_0}$

$C_v = \frac{1}{A_v}$

$L_v = \frac{A_v}{\omega_v^2}$

$L_{\infty} = A_{\infty}$

$(\omega \rightarrow \infty \text{ bei } \omega = \omega_v)$

$L_v = \frac{1}{A_v}$

$C_v = \frac{A_v}{\omega_v^2}$

$C_{\infty} = A_{\infty}$

$(\omega \rightarrow 0 \text{ bei } \omega = \omega_v)$

immer realisierbar bei geg. RZPF

man erhält kanonische Schaltungen (min. Speicherelemente)

ist  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} F(p)$  bekannt, so auch Topologie ( $\Rightarrow$  Bauelemente)

$\text{Grad } F(p) \geq 2 \rightarrow$  2 oder mehr äquiv. Schaltungen

dabei wechseln sich  $f_i$   
und  $f_{i+1}$  in der W/L-Folge  
ab


$$f_{\mu}(p) = \frac{A_0 y_0}{\rho} + \sum \frac{A_{\nu} y_{\nu} p}{\rho^2 + y_{\nu}^2} + A_{\infty} y_{\infty} p \quad \text{mit} \quad 0 \leq p_1 \leq A, \quad i \in \{0, \infty, \nu\}$$

$\delta_i = 1$  : Grundrechnung d. Restausdrucks  $\rightarrow$  korrek. Schaltung  
(Vollbetrieb)

Ex. 9 (0-1): • Verringerung d. Resistenz, aber keine Bandenbildung  $\rightarrow$  kein harmon. Schwingung  
(Teilabbau)  
• Aber: Beeinflussung d. Lage d. Nst  $\rightarrow$  nach bekannt. Bildung: Polstellen  
↳ Pole können an best. Frequ. abgelesen werden  
\* Nullstellen wandern auf Teilabgebau bei zu

RC - Zuspätk.

2d Impedance:

$$W_{rc}(u) = f_{rc}\left(u, v_1, \frac{1}{u \cdot v_1}\right) \quad \forall v$$



Exer : (i)  $W_{RC}(s) = \frac{1}{\mu} \cdot W_{LC}(\mu) \Big|_{\mu^2=s}$   
(ii)  $W_{LC}(\mu) = \mu \cdot W_{RC}(\mu^2)$

Eigenschaften:

- nur einfache Pole/Pkt. auf neg. Ast d. reellen Achse
- Pole/Pkt. wechseln sich ab
- im Häufung zu  $s=0$  liegt immer ein Pol (entw. bei  $s=0$ )  
 $\quad \quad \quad s=-\infty \quad \quad \quad \text{Pkt} (\quad \quad \quad s=-\infty)$
- $\frac{dW_{ec}(p)}{dp} \Big|_{p=s+j\omega} = \int \begin{matrix} < 0 \\ = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} W_{ec}(p) \neq \text{const.} \\ W_{ec}(p) = \text{const.} \end{matrix}$


Synthesis: (i)  $RC-ZP \rightarrow RZPF \xrightarrow{\text{Synthase}} RC-ZP$

(ii) Direkte PB-Entwicklung:

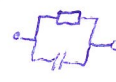
$$W_R(s) = \frac{1}{s} W_c(s) \Big|_{\mu^2 = s} = \frac{A_0}{s} + \sum \frac{A_v}{s + s_v} + A_\infty$$

$\hookrightarrow C_0 = \frac{1}{A_0}$ 
 $\quad \quad \quad r_v = \frac{A_v}{s_v}$ 
 $\quad \quad \quad c_v = \frac{1}{A_v}$

$C_\infty = A_\infty$



The circuit diagram shows a resistor and a capacitor connected in parallel. The input terminals are on the left, and the output terminals are on the right. The resistor is represented by a rectangle, and the capacitor is represented by two parallel lines.



PBE vs. KBE :

	PBE	KBE
Rechenaufwand	<p>alle Kst. d. Kenners (aufwendig!)</p> <p>alle Residuen / Gütekriterien</p>	<p>alle oben berechn. Pole (und Kst.)</p> <p>zugehörige Residuen</p>
Schätzungsabgleich	<p>Pole <math>\hat{=}</math> Resonanzstellen d. einzelnen Schwingkreise</p> <p><math>\hookrightarrow</math> Gütekriterien</p>	<p>Pole entstehen durch Zusammenwirken <u>aller</u> Elemente <math>\rightarrow</math> schwer abgleichbar</p>
		<p><u>aber</u>: Polabgleich nur bei <math>\rho = 0/\infty</math>:</p> <p><math>\rho = 0</math>: Bandstrecke mit <math>\lim_{\rho \rightarrow 0} p(F_i)</math></p> <p><math>\rho = \infty</math>: Polymindigung</p>

Implementation:

- jeder Knoten sollte Kapazität zur Masse haben, da Streuung somit mitberücksichtigt werden
- bei äquiv. Schaltungen die gegen Bandbreitenerosion robusteste Schaltung wählen

Zusammenhang  
RZPF & Hurwitz:

$$H(p) = G(p) + U(p) \iff F(p) = \frac{U(p)}{G(p)} \text{ bzw. } \frac{G(p)}{U(p)} \dots \text{REPF}$$

Anwendung: Stabilität ein häusches 4-Pets.

27.  $\vec{v}$ -FLT,  $H(\rho)$

ist  $H$  stabil, dann  $H_{\text{min}} \rightarrow$

(i) bilde  $F(\rho) = \frac{U(\rho)}{G(\rho)}$

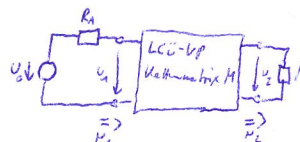
(ii) Kettenbruchentwicklung (aber nur für  $p=0$  <sup>+</sup>  ~~$\infty$~~ )

(ii) "Bauelementwerte" alle positiv  
 $1 \leq p$  und  $G(p)$  teilerfremd ( $\#$ )

Reaktanzverpoler

Wirkungsfl. eines in Widerstand  
eingeschalteten LCÜ-Körpers:

Wirkleistung:  $N_2 = \frac{|U_2|^2}{R_2}$   
 $N_1 = \frac{|U_1|^2}{4R_1}$



VP passiv & verlustfrei  $\Rightarrow N_1 = N_2$

$\Rightarrow \frac{|U_1|}{2|U_2|} \geq \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} > 0 \Rightarrow K(p) = \frac{U_1}{2U_2} = \left( \frac{1}{F(p)} \right) \dots$  Wirkungsfl.

- Eigenschaften von  $K(p)$ :
  - rational in  $p$
  - reell für reelle  $p$
  - keine Pst. in  $\text{Re}(p) \geq 0$

Matrix:  $\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$

• Falls VP passiv:  $\det M \equiv 1$  (reziprok)

$K(p) = \frac{1}{2} \left[ A_{11} + \frac{1}{R_2} A_{12} + R_1 A_{21} + \frac{R_1}{R_2} A_{22} \right]$

Eigenschaften von  $M$ : (i) Alle d. Matrix d. reaktanz. VP sind:

- rational in  $p$
- reell für reelle  $p$
- Elemente auf Hauptdiagonale sind gerade
- ...

(ii)  $\det M \equiv 1$

(iii) Alle Quotienten benachbarter Elemente sind REPF

$A_{12} = 0 \text{ oder } A_{21} = 0 \Rightarrow A_{11} = \frac{1}{A_{22}} = c$

Synthese: Vorgehen:

- ① Mit Approximationsverfahren ein  $|K(i\Omega)|^2$  bestimmen, welches Totenzeitverhalten erfüllt und durch RVP realisierbar ist
- ②  $K(s)$  aus  $|K(i\Omega)|^2$  bestimmen
- ③ Matrix  $M$  aus  $K(s)$
- ④ RVP aus  $M$

②

• analyt. Fortsetzung:  $i\Omega \rightarrow s$ :  $Q(s) = |K(i\Omega)|^2 \Big|_{\Omega = \frac{s}{i}}$  (gerade in  $s$   $\Rightarrow$  Pole/Pst. liegen symmetrisch zum Ursprung)

$Q(s) = K(s) \cdot K(-s) = A \cdot \frac{s^m \dots}{s^n \dots} \Rightarrow K(s)$  best. durch Aufheben d. Pole/Pst.:  $+s_p$  zu  $K(s)$ ,  $-s_p$  zu  $K(-s)$

- konj. kompl. Pole/Pst. zusammenfassen
- Alle Pst. in  $\text{Re}(s) < 0$  zu  $K(s)$
- Pole auf imag. Achse: Hülfe zu  $K(s)$

③

• Normierung:  $a_{11} = A_{11}$ ,  $a_{12} = \frac{A_{12}}{R_2}$ ,  $a_{21} = R_1 A_{21}$ ,  $a_{22} = A_{22} \rightarrow K(s) = \frac{1}{2} [a_{11} + a_{12} + q^2(a_{21} + a_{22})]$

Ansatz:  $a_{11} + a_{12} = K(s) + K(-s)$   
 $q^2(a_{21} + a_{22}) = K(s) - K(-s)$

$\rightarrow a_{11} = \frac{1}{2} [K(s) + K(-s) + K(-s) + K(s)]$   $a_{12} = \frac{1}{2} [K(s) + K(-s) - K(-s) - K(s)]$

$q^2 a_{21} = \frac{1}{2} [K(s) - K(-s) - K(-s) + K(s)]$   $q^2 a_{22} = \frac{1}{2} [K(s) - K(-s) + K(-s) - K(s)]$   $\xrightarrow{\det M = 1} K(s) \cdot K(-s) - q^2 = f(s)f(-s)$

$\rightarrow f(s)$  bestimmen durch Aufheben des Pole/Pst. (Vorzeichen (jedoch: keine Stabilitätsbed.))

Vermittlung d. Matrix: (1) HP vor Matrix ziehen:  $M = \frac{1}{G} \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}$

(2) Bestimmung d. Pole d. Wirkungsfl.:  $K(s) = \frac{1}{2} \frac{G_{11} + \frac{G_{12}}{R_2} + R_1 G_{21} + \frac{R_1}{R_2} G_{22}}{G}$

- Für dieses Verfahren müssen alle Pole auf d. imag. Achse liegen
- Zähler & Nenner haben keine gemeinsame Pst. auf d. imag. Achse
- höchster Grad  $G_{11} \geq \text{Grad } G$

(3) Suche  $G_{12}$  mit höchstem Grad

(4) Bilde Quotient  $\frac{G_{12}}{G_{\text{Nenner}}}$  (ist REPF); So wählen, dass Quotient mind. einen Pol von  $K(s)$  enthält

(5) Interpretiere Quotient als REPF (ggfs. normieren)





### Bewertung Realisierbarkeit:

- Schwingen d. RC-Komplexe bekanntlich
- $\nu$  stark schmalbandig  $\frac{A(\omega)}{1 + \beta_{\omega}} \approx \beta_{\omega}$  für  $\nu \gg \omega$

### Fastformel:

- (i) Nicht-irr. Verstärker
- (ii) Diff.-F.
- (iii) Invertierender

(i) Einfluss auf Güte: Hohe Abgabe  $q_p \rightarrow$  Pole nahe d. imag. Achse  $\rightarrow$  Koef. klein

(ii) irr. Verstärker:  $1 + \beta_{F23} - \frac{A}{F} A_{F3}$

entsprech. Werte für  $F_{23}$  und  $F_{34}$

(iii) irr. Verstärker:  $F_{23}$  geeignet gewählt  $\rightarrow$  hohe Abgabe bei vgl. kleinen Bandbreitenwerten

### Empfindlichkeitsrechnung

Definition: Empfindlichkeit  $S_x^{A(\omega)} = \frac{\frac{dA(\omega)}{dx}}{\frac{A(\omega)}{x}} = \frac{x}{A(\omega)} \frac{dA(\omega)}{dx} = \frac{d \ln A}{d \ln x}$

$S_x^{A^n} = \frac{n}{x} \cdot S_x^A \quad (\rightarrow S_{1/x}^A = -S_x^A \quad ; \quad S_x^{-A} = -S_x^A)$

$S_x^{A(x)} = S_x^{A(\omega)}$

$S_x^{A(u(x), v(x))} = S_{u(x)}^A \cdot S_x^{u(x)} + S_{v(x)}^A \cdot S_x^{v(x)} \quad (\rightarrow S_x^{u(x) \cdot v(x)} = S_x^{u(x)} + S_x^{v(x)} \quad ; \quad S_x^{\frac{u(x)}{v(x)}} = S_x^{u(x)} - S_x^{v(x)})$

$S_x^{A(u \cdot v)} = S_u^A \cdot S_v^A \cdot S_x^{u \cdot v}$

$S_x^{A(x)} = \frac{1}{\text{ave } A(x)} \ln \{ S_x^{A(x)} \}$

$S_x^{iA(x)} = R_x \{ S_x^{A(x)} \}$

### Empfindlichkeit von RC-Ketten mit gesteuerten Quellen

oder Änderung d. Impedanzniveaus:  $F(\omega; a, L_i, \frac{C_i}{a}; q, R_i, v_i, b_i; p, a_i, \frac{q_i}{a}) = \lambda F(\dots)$

mit  $\lambda = \begin{cases} 1 & \text{für } F \equiv \frac{u_2}{u_1} \text{ : Dimensionlos} \\ 0 & \text{für } F \equiv \frac{u_2}{I_1} \text{ : Dimension } \Omega \\ \infty & \text{für } F \equiv \frac{I_2}{u_1} \text{ : Dimension } S \end{cases}$

es gilt:  $\sum_i S_{L_i}^F - \sum_i S_{C_i}^F + \sum_i S_{R_i}^F + \sum_i S_{v_i}^F - \sum_i S_{b_i}^F = \begin{cases} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{cases}$

### Empfindlichkeit von LC-Ketten: (ohne Strom-/spg.-gest. Quellen)

$\sum_i S_{L_i}^F - \sum_i S_{C_i}^F = 0$

$\frac{dF}{F} = \sum_i S_{L_i}^F \frac{dL_i}{L_i} + \sum_i S_{C_i}^F \frac{dC_i}{C_i} + \sum_i S_{R_i}^F \frac{dR_i}{R_i} + \sum_i S_{b_i}^F \frac{db_i}{b_i}$

### Y. von Dünnschicht-RC-Netzen: (-----)

$\sum_i S_{R_i}^F - \sum_i S_{L_i}^F = 0$

$\frac{dF}{F} = \sum_i S_{R_i}^F \frac{dR_i}{R_i} + \sum_i S_{C_i}^F \frac{dC_i}{C_i} + \sum_i S_{v_i}^F \frac{dv_i}{v_i} + \sum_i S_{b_i}^F \frac{db_i}{b_i}$

für  $\frac{dR_i}{R_i} = \frac{dR}{R} = -\frac{dC}{C} = -\frac{dC_i}{C_i}$  (Bewerte in Schichttechnik + Abgleich + Anpassung,  $TKR = -TKC$ )

gilt:  $\frac{dF}{F} = \sum_i S_{v_i}^F \frac{dv_i}{v_i} + \sum_i S_{b_i}^F \frac{db_i}{b_i}$

### Empfindlichkeit von RC-aktiven Ketten: von Teilfiltern (max. 2. Grad)

$F = \frac{\pi}{\nu} K_v \frac{S_{vp} + \frac{\omega_0}{\gamma \omega}}{p^2 + \frac{\omega_0}{q \nu} p + \omega_0^2}$

( $v_i^+ = v_i^- = v_i$  ... innere Verstärkung d. Op's bei Benutzung des +/- Eingangs; Fall "u." = Vernachlässigung d. Gleichst.-verstärkung)

für Filtertech. interessant:  $d|F|/|F|$  ... Dämpfungsabweichung  
 $d\arg F / \arg F$  ... Phasenabweichung

$\frac{dF}{F} = \sum_i S_{R_i}^F \frac{dR_i}{R_i} + \sum_i S_{C_i}^F \frac{dC_i}{C_i} + \sum_i S_{v_i}^F \frac{dv_i}{v_i} = \sum_i S_{v_i}^F \frac{dv_i}{v_i}$

$\hookrightarrow \frac{d|F|/|F|}{\arg F} = \sum_i R_{L_i} S_{v_i}^F \frac{dv_i}{v_i}$

$\hookrightarrow \frac{d\varphi(\omega)}{\varphi(\omega)} = \frac{1}{\varphi} \sum_i \ln \{ S_{v_i}^F \} \frac{dv_i}{v_i}$

$TKR = \frac{1}{R_0} \frac{dR_0}{dT} \leftrightarrow R(T) = R_0 (1 + TKR(T - T_0))$